Exponentialfunktion mit e (= Eulersche Zahl)

Die Euler'sche Zahl e ist eine transzendente Zahl, also eine Zahl, die durch keine Gleichung fassbar ist, sondern nur durch einen Grenzwert. (e = 2,718…)

Wozu kann man sie brauchen?

- *e kommt bei der Exponentialfunktion vor und bei weiteren Grenzwerten.*

Für uns ist wichtig, dass e zwischen 2 und 3 liegt.

Damit lassen sich Exponentialfunktionen bilden, indem man einen Exponenten dazu fügt, der aus λ (Lambda) und t besteht: $e^{\lambda \cdot t}$

Die exponentielle Wachstumsfunktion $N_t = N_o \cdot a^t$ lässt sich mit $e^{\lambda \cdot t}$ so anschreiben: $\boxed{N_t = N_o \cdot e^{\lambda \cdot t}}$

Hier sieht man, dass $\boxed{a = e^{\lambda}}$ bzw. $\boxed{\lambda = \ln(a)}$ sein muss.

Beispiel: Wandle die Funktion $N_t = 100 \cdot 2^t$ in die Eulerform um

Lösung: Es muss $a = 2 = e^{\lambda}$ sein.
Logarithmiert man das mit dem natürlichen Logarithmus ln (=Umkehrfunktion von e^), so ergibt sich: $\boldsymbol{\lambda} = \ln(2) = 0{,}693\ldots$ ➔ Die Eulerform wäre also: $N_t = N_o \cdot e^{0{,}693 \cdot t}$

Damit kann man auch die exponentiellen Wachstumsaufgaben lösen:

Beispiel: Nach 5 Stunden sind aus 1000 Bakterien 3500 Bakterien geworden.
Gib die Wachstumsfunktion in der Eulerform an und berechne, wann die Bakterienzahl die Millionengrenze überschreitet.

Lösung: Wir setzen einfach in die Eulerform ein: $N_t = N_o \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ➔ $3500 = 1000 \cdot e^{\lambda \cdot 5}$
Nach Dividieren durch 1000 und Logarithmieren mit ln ergibt sich: $\ln(3{,}5) = \boldsymbol{\lambda} \cdot 5$
Somit ist $\boldsymbol{\lambda} = \ln(3{,}5)/5 = 0{,}25\ldots$
Damit ist die Eulerform der exponentiellen Wachstumsfunktion: $\mathbf{N_t = 1000 \cdot e^{0{,}25 \cdot t}}$
Die Millionengrenze wird überschritten, wenn $1\,000\,000 = 1000 \cdot e^{0{,}25 \cdot t}$ ist.
Nach dem Dividieren durch 1000 und Logarithmieren mit ln ergibt sich: $\ln(1000) = 0{,}25 \cdot t$
und daraus folgt: $t = \ln(1000)/0{,}25 =$ **27,6 Stunden**

Was bedeutet nun Lambda?

- **Lambda ist der momentane (stetige) Prozentsatz eines exponentiellen Wachstumsvorgangs.**

z.B.:

- wenn etwas jährlich um 2% steigt (a=1,02), dann steigt es stetig um λ = 1,98% (=ln(1.02))
- wenn etwas jährlich um 20% steigt (a=1,20), dann steigt es stetig um λ = 18,2% (=ln(1,2))
- wenn etwas jährlich um 80% steigt (a=1,80), dann steigt es stetig um λ = 58,8% (=ln(1,8))
- wenn etwas jährlich um 2% sinkt (a= 0,98), so sinkt es stetig um λ = −2,02% (=ln(0,98))
- wenn etwas jährlich um 20% sinkt (a=0,80), so sinkt es stetig um λ = −22,3% (=ln(0,8))
- wenn etwas jährlich um 80% sinkt (a=0,20), so sinkt es stetig um λ = −160,9% (=ln(0,2))

Übungen:

1) Wandle in die Eulerform um:

a) $N_t = 36 \cdot 5^t$ b) $N_t = 24000 \cdot 1{,}01^t$ c) $N_t = 24 \cdot 0{,}5^t$ d) $N_t = 200 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t$

2) Wandle in die $N_t = N_o \cdot a^t$ − Form um und gib den Wachstums−Prozentsatz **p = (a−1)*100** an

a) $N_t = 100 \cdot e^{2 \cdot t}$ b) $N_t = 24000 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}$ c) $N_t = 24 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$ d) $N_t = 200 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$

3) Die Bevölkerung eines Landes wächst von 2,4 Millionen im Jahre 2000 auf 3,1 Millionen im Jahre 2018. Erstelle einen exponentielle Wachstumsfunktion in der Eulerform dafür und berechne, wann das Land 5 Millionen Einwohner haben wird.

4) Von dem radioaktiven Stoff Cäsium−137 sind zuerst 100% vorhanden und nach 30 Jahren (= Halbwertszeit) nur mehr 50%. Erstelle eine exponentielle Funktion in der Eulerform und berechne, wann nur mehr 10% vorhanden sind.

5) Der Bierschaum ist am Anfang 27 mm hoch und nach 20 Sekunden nur mehr 25 mm hoch. Erstelle eine exponentielle Funktion in der Eulerform und berechne, wann der Bierschaum nur mehr 1 mm hoch ist.

Lösungen:

1) a) $N_t = 36 \cdot e^{1{,}609 \cdot t}$ b) $N_t = 24000 \cdot e^{0{,}00995 \cdot t}$ c) $N_t = 24 \cdot e^{-0{,}693 \cdot t}$ d) $N_t = 200 \cdot e^{-1{,}609 \cdot t}$

2) a) $N_t = 100 \cdot 7{,}389^t$ p = 638,9% b) $N_t = 24000 \cdot 1{,}1005^t$ p = 10,05%
c) $N_t = 24 \cdot 0{,}60653^t$ p = −39,35% d) $N_t = 200 \cdot 0{,}9512^t$ p = −4,88%

3) $\lambda = \ln(3{,}1/2{,}4) / 18 = 0{,}0142$ ➔ $N_t = 2{,}4 \cdot e^{0{,}0142 \cdot t}$ ➔ Im Jahr 2051 sind es 5 Mill. Einwohner

4) $\lambda = \ln(50/100) / 30 = -0{,}0231$ ➔ $N_t = 100\% \cdot e^{-0{,}0231 \cdot t}$ ➔ Nach 99,7 Jahren sind es 10%

5) $\lambda = \ln(25/27) / 20 = -0{,}003848$ ➔ $N_t = 27 \cdot e^{-0{,}003848 \cdot t}$ ➔ Nach 856 Sekunden (=14,5 Minuten) ist der Bierschaum auf 1mm gesunken